L.B. Monastir	Devoir de contrôle n : 1	3 ème Math
P.P. : Ali Zouhaier	Durée : 120 minutes	2012-2013

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant** votre choix.

1/ La fonction f : $x \mapsto \frac{2012}{1+\sqrt{x-7}} + 7$ est bornée sur son domaine de définition

2/ Soit f une fonction continue sur IR; $f(0) = -3$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ IR.
On a $f(x) < 0$ pour tout $x \in$ IR

3/ Soit ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle de centre O.
On a $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}$ $[2\pi]$

4/ $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1+3x+2x^2}{(1-|x|)(3x-1)} = 4.$

Exercice 2 (6 points)

1/ Déterminer le domaine de définition D_f de f : $x \mapsto \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$

2/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition D_f.

3/a- Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$

b- Calculer $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

4/ Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-5x+4} & \text{si } x < 1 \\ x - \frac{5}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a- Montrer que h est continue en 3.

b- Etudier la continuité de h en 1.

5/a- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]2;6[$

b- Donner un encadrement de α d'amplitude inférieur à 2.

Exercice 3 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral tel que AB=6 , I le milieu de [AB].

1/ Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P;\ MA^2 - MB^2 = 36\}$.

a- Vérifier que $B \in \Delta$.

b- Montrer que pour tout M du plan P on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$.

c- En déduire l'ensemble Δ.

2/ Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, −5).

a- Montrer que pour tout M du plan on a : $2MA^2 - 5\,MB^2 = -3\,MG^2 + 120$.

b- En déduire l'ensemble $E = \{M \in P;\ 2MA^2 - 5MB^2 = -2012\}$.

3/ Soit le repère orthonormé $R = \left(I;\ \frac{1}{IB}\overrightarrow{IB};\ \frac{1}{IC}\overrightarrow{IC}\right)$

a- Déterminer les coordonnées de chacun des points A, B et C dans le repère R

b- Donner une équation cartésienne de chacun des ensembles Δ et E.

c- Etudier la position relative de Δ et E.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté P ,on considère le triangle ABC tel que

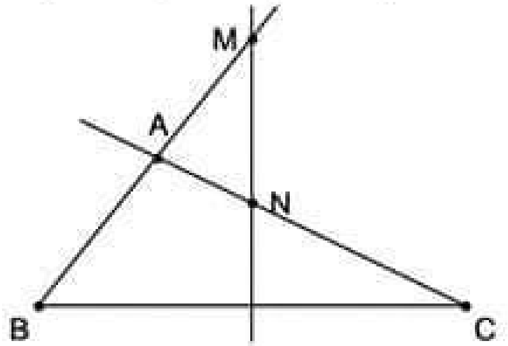
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{14024\pi}{7} \quad [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{450\pi}{7} \quad [2\pi]$.

1/ Donner la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

2/ Calculer une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right)$.

3/ Posons M le point d'intersection de la demi droite [BA) et de la droite Δ la médiatrice de [BC] N est le point d'intersection de Δ et (AC).

Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MN}}\right)$ puis $\left(\widehat{\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NA}}\right)$.



Bon Travail

Exercice 1

1/ **Vrai**

- $f(x) = \dfrac{2012}{1+\sqrt{x-7}} + 7 \geq 7$ donc f est minorée par 7.
- $\sqrt{x-7} \geq 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x-7} \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{x-7}} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{2012}{1+\sqrt{x-7}} \leq 2012$

  $\Rightarrow f(x) = \dfrac{2012}{1+\sqrt{x-7}} + 7 \leq 2019$ donc f est majorée par 2019

2/ **Vrai**

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel a tel que $f(a) > 0$
Alors on aura : f est continue sur l'intervalle de bornes a et 0 et aussi $f(0) \times f(a) < 0$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel b entre a et 0 tel que $f(b) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $f(x) \neq 0$ pour tout x de IR
Concusion notre supposition est fausse et on a $f(x) < 0$ pour tout x de IR.

3/ **Vrai**

. ABC est isocèle en A donc $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \pi - 2\,\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}\ [2\pi]$

. O est le centre du cercle circonscrit à ABC donc $\widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)} \equiv 2\,\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}\ [2\pi]$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \pi - \widehat{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\ [2\pi]$

4/ **Faux**

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+3x+2x^2}{(1-|x|)(3x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+3x+2x^2}{(1-(-x))(3x-1)}$ car x est très proche de -1

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(1+x)(3x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2

1/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$ existe $\Leftrightarrow\ x-2 \geq 0$ et $x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow\ x \geq 2$ et $x \neq 3$.

Conclusion : $D_f = [2;+\infty[\setminus\{3\}$.

2/ $(x \mapsto x-2)$ est continue et positive sur $[2;+\infty[\setminus\{3\}$.
donc $\left(x \mapsto \sqrt{x-2}\right)$ est continue sur $[2;+\infty[\setminus\{3\}$.
donc $\left(x \mapsto \sqrt{x-2}-1\right)$ est continue sur $[2;+\infty[\setminus\{3\}$.
Aussi $(x \mapsto x-3)$ est continue et ne s'annule pas sur $[2;+\infty[\setminus\{3\}$
Alors $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$ est continue sur $[2;+\infty[\setminus\{3\}$.

3/a- Pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} \times \dfrac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}$

$$= \frac{x-2-1^2}{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} = 0.$

4/a-
- $h(3) = 3 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}.$

• $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{2}$

Donc f est continue en 3.

b- • $f(1) = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-4)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x-4} = \frac{3}{-3} = -1.$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Donc f n'est pas continue en 1.

5/a- • la fonction $\left(x \mapsto \frac{x^3-1}{x^2-5x+4}\right)$ est continue sur $IR\backslash\{1;4\}$ (fonction rationnelle)

donc $h : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^2-5x+4}$ est continue sur [2;3[.

• h est continue en 3.

• la fonction $(x \mapsto x-2)$ est continue et positive sur [3;6]

donc la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x-2}\right)$ est continue sur [3;6]

alors la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x-2}+1\right)$ est continue et ne s'annule pas sur [3;6]

Donc la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}$ est continue sur [3;6]

Bilan : h est continue sur [2;6]

de plus $h(2) \times h(6) = \left(2 - \frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{6-2}+1} = -\frac{1}{6} < 0$ donc d'après le théorème de valeur intermédiaire l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans]2;6[.

b- On remarque que $h(2) = -\frac{1}{2} < 0$ et $h(3) = \frac{1}{2} > 0$ donc $2 < \alpha < 3$ c'est un encadrement de α d'amplitude 1.

Exercice 3

1/a- $BA^2 - BB^2 = 6^2 - 0 = 36$ donc $B \in \Delta$.

b- $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\right) = \left(2\overrightarrow{MI}\right).\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}.$

c- $M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 36 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}$ d'après **1/a- et 1/b-**

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow M \in$ à la droite perpendiculaire à (AB) en B.

Conclusion : Δ est la droite perpendiculaire à (AB) en B.

2/a- $2MA^2 - 5\,MB^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - 5\,\overrightarrow{MB}^2 = 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - 5\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$

$= 2MG^2 + 4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + 2GA^2 - 5MG^2 - 10\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} - 5GB^2$

$= -3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB}\right) + 2GA^2 - 5GB^2$

$= -3MG^2 + 2GA^2 - 5GB^2.$

• G est le barycentre des points (A,2) et (B,−5)

donc $\overrightarrow{AG} = \frac{-5}{2+(-5)}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{2+(-5)}\overrightarrow{BA}$

alors $\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left|\frac{-5}{2+(-5)}\right|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{BG}\right\| = \left|\frac{2}{2+(-5)}\right|\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$

d'où $AG = \frac{5}{3} \times 6 = 10$ et $BG = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$

Ainsi $2MA^2 - 5MB^2 = -3MG^2 + 2 \times 10^2 - 5 \times 4^2 = -3MG^2 + 120.$

b- $M \in E \iff 2MA^2 - 5MB^2 = -2012$

$$\iff -3MG^2 + 120 = -2012$$

$$\iff MG^2 = \frac{-2012 - 120}{-3} = \frac{2132}{3}$$

$$\iff MG = \sqrt{\frac{2132}{3}}$$

$\iff M \in \mathcal{C}_{\left(G;\sqrt{\frac{2132}{3}}\right)}$ (le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{2132}{3}}$)

3a- Dans le repère $R=\left(I;\ \frac{1}{IB}\overrightarrow{IB};\ \frac{1}{IC}\overrightarrow{IC}\right)$ on a :

$B(3;0)$; $A(-3;0)$ et $C\left(0;\sqrt{27}\right)$ car $IC = \sqrt{BC^2 - IB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$.

b- $M(x,y) \in \Delta \iff MA^2 - MB^2 = 36$

$$\iff (x+3)^2 + (y-0)^2 - (x-3)^2 - (y-0)^2 = 36$$

$$\iff x^2 + 6x + 9 + y^2 - x^2 + 6x - 9 - y^2 = 36$$

$$\iff x = 3.$$

Ainsi Δ a pour équation cartésienne $x - 3 = 0$.

▸ $M(x,y) \in E \iff 2MA^2 - 5MB^2 = -2012$

$$\iff 2\left[(x+3)^2 + (y-0)^2\right] - 5\left[(x-3)^2 + (y-0)^2\right] = -2012$$

$$\iff 2x^2 + 12x + 18 + 2y^2 - 5x^2 + 30x - 45 - 5y^2 = -2012$$

$$\iff -3x^2 + 42x - 3y^2 = -2012 + 45 - 18 = -1985$$

$$\iff x^2 + 14x + y^2 = \frac{1985}{3}$$

$$\iff (x+7)^2 + (y-0)^2 = \frac{1985}{3} + 49 = \frac{2132}{3}$$

Ainsi E a pour équation cartésienne $(x+7)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{\frac{2132}{3}}^{\,2}$.

c- E est de centre le point $J(-7;0)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{2132}{3}}$

Donc $d(J;\Delta) = \dfrac{|-7+3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4 < \sqrt{\dfrac{2132}{3}} = r$ donc Δ et E sont sécants.

Exercice 4

1/ $\widehat{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} = -\frac{14024\pi}{7}\ [2\pi]$

$$= -2003\pi - \frac{3\pi}{7}\ [2\pi]$$

$$= -2004\pi + \pi - \frac{3\pi}{7}\ [2\pi]$$

$$= \frac{4\pi}{7}\ [2\pi].$$

Comme $\frac{4\pi}{7} \in]-\pi;\pi]$ alors $\frac{4\pi}{7}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

2/ $\widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)} = \pi\ [2\pi]$

$$\iff \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} - \frac{450\pi}{7} + \left(-\frac{4\pi}{7}\right) = \pi\ [2\pi]$$

$$\iff \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} = \pi + \frac{450\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}\ [2\pi]$$

$$\iff \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} = \frac{461}{7}\pi\ [2\pi]$$

$$\iff \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} = 66\pi - \frac{\pi}{7}\ [2\pi]$$

$$\iff \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} = -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$$

3/ . $M \in \Delta$ la médiatrice de [BC] donc MBC est un triangle isocèle alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)} = \pi - 2\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BM}\right)}\ [2\pi]$

$= \pi - 2\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\ [2\pi]$ car $M \in [BA)$

$= \pi + 2\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)}\ [2\pi]$

$= \pi + 2 \times \frac{-450\pi}{7}\ [2\pi]$

$= -128\pi + \frac{3\pi}{7}\ [2\pi]$

$= \frac{3\pi}{7}\ [2\pi]$

Comme N aussi appartient à la médiatrice de $[BC]$ donc (MN) est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)$.

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MN}\right)} = \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)}\ [2\pi]$

$= \frac{3\pi}{14}\ [2\pi]$.

· $\widehat{\left(\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NA}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{NM};\overrightarrow{NI}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{NI};\overrightarrow{NC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{NC};\overrightarrow{NA}\right)}\ [2\pi]$

$= \pi + \left(\pi - \widehat{\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IN}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CI}\right)}\right) + \pi\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} - \widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}\ [2\pi]$ car $\widehat{\left(\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CI}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)}\ [2\pi]$

$= \frac{5\pi}{14}\ [2\pi]$ car $\widehat{\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)} = -\frac{\pi}{7}\ [2\pi]$